



DEPARTEMENT DE TCO
Enseignant: Dr KIKMO
Cursus Sciences de l'Ingénieur

Examen d'Algèbre Linéaire 2
Crédit: 3; Durée: 2h00; Effectifs: 96
Documents non autorisés

Semestre 3 2024/2025

Exercice 1

Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable? Si oui déterminer une base de vecteurs dans laquelle A est diagonalisable. Ecrire la forme diagonale de A .
2. En déduire A^n pour n entier naturel.

Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (3x - 2y - 2z, 5x - 3y - 4z, x - y).$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice A de f par rapport à la base canonique $B=(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\ker f$, une base de $\ker f$ et la dimension de $\ker f$. En déduire le rang de f .
4. Déterminer une base de $\text{Im} f$.

5. Soient $e'_1 = (0,1,1)$, $e'_2 = (1,1,0)$, $e'_3 = (2,2,1)$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de

colonnes e'_1, e'_2, e'_3 . Montrer que P est inversible et calculer l'inverse P^{-1} .

6. En déduire que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. En remarquant que P est la matrice de passage de la base canonique B à la base B' , déterminer la matrice A' de f par rapport à la base B' .

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n . Soient B et B_1 deux bases de E , et M la matrice de passage de la base B à la base B_1 . On note B^* et B_1^* les bases duales des bases B et B_1 respectivement.

1. Quelle est la matrice P de passage de la base B^* à la base B_1^* ?
2. On suppose $E = \mathbb{R}^3$ et on note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E . On considère les vecteurs $u_1 = (3, 0, 1)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ de E .
- 2.1. Montrer que $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées dans B^* des vecteurs de B_1^* , base duale de B_1 .

2.2. On considère les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 définies par :

$$\phi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\phi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$$

$$\phi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 2x_3$$

- a. Montrer que $D^* = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ est une base de l'espace dual $(\mathbb{R}^3)^*$.
b. Déterminer la base pré-duale de D^* .

« Protégeons notre environnement : gardons-le sain et propre en adoptant une nouvelle attitude ! »

N'hésitez jamais à nous faire
part de vos moindres
préoccupations au campus.
Vos aînés académiques seront
toujours là pour vous
orienter : +237 6 58 70 86 12

